

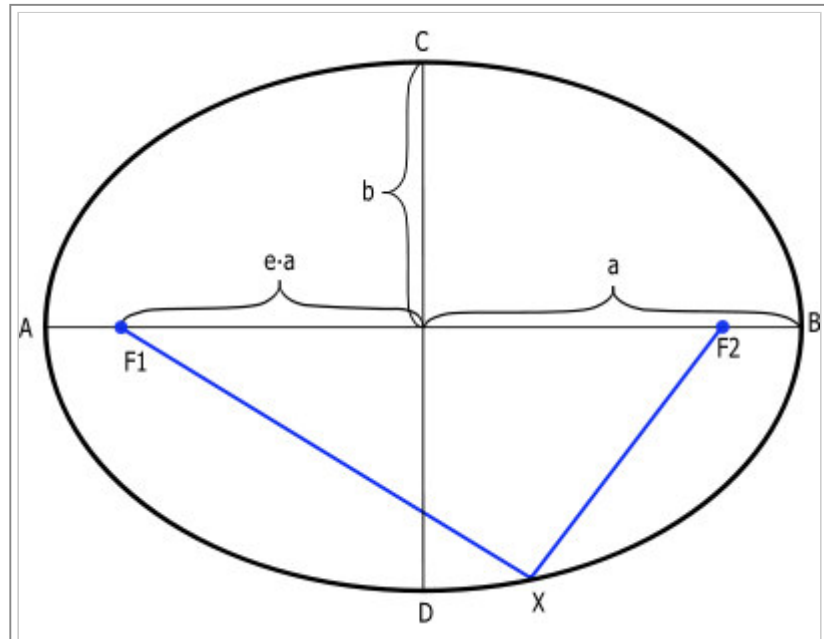
Ellisse

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In geometria, un'**ellisse** è una figura che assomiglia ad un cerchio allungato in una direzione. Questa figura è un esempio di sezione conica e può essere definita come il luogo dei punti, in un piano, la cui somma delle distanze da due punti fissi dati (detti **fuochi**) è costante, cioè sempre uguale. Secondo le leggi di Keplero, l'orbita di un pianeta è un'ellisse con il Sole in uno dei due fuochi.

Se i due fuochi coincidono, si ha una circonferenza, che può considerarsi quindi un caso particolare di ellisse (ad eccentricità nulla).

L'eccentricità di un'ellisse è compresa tra zero e uno.



L'ellisse con evidenziate alcune sue proprietà, si noti anche che la distanza CF_2 è uguale ad a , con tutte le relative simmetrie, quindi se la distanza dal centro al fuoco è c , $b^2 + c^2 = a^2$

Il segmento che passa dai due fuochi è detto **asse maggiore** ed è anche il più lungo segmento contenuto nell'ellisse. Il segmento passante per il centro (a metà tra i fuochi), ortogonale all'asse maggiore, è l'**asse minore**. Il **semiasse maggiore** è una delle metà dell'asse maggiore; parte dal centro, passa attraverso un fuoco e va fino all'ellisse. Analogamente il **semiasse minore** è metà dell'asse minore. I due assi sono l'equivalente per l'ellisse del diametro, mentre i due semiassi sono l'equivalente del raggio.

La dimensione e la forma di un'ellisse sono determinate da due costanti, dette convenzionalmente a e b . La costante a è la lunghezza del semiasse maggiore; la costante b è la lunghezza del semiasse minore.

L'equazione dell'ellisse si trova eguagliando la somma delle distanze fra i fuochi e un punto generico $P(x,y)$ e il doppio del semiasse maggiore.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = 2a$$

Per trovare l'equazione canonica o normale dell'ellisse (cioè con centro nell'origine e i fuochi nell'asse delle x) sostituiamo $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_1 = -c$, $x_2 = c$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e con le opportune manipolazioni si ottiene un'ellisse centrato nell'origine di un sistema di assi cartesiani $x-y$ con l'asse maggiore posto lungo l'asse delle ascisse è definito dall'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La stessa ellisse è rappresentata anche dall'equazione parametrica:

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \\ 0 &\leq t < 2\pi \end{aligned}$$

che fa uso delle funzioni trigonometriche seno e coseno.

La forma di un'ellisse è solitamente espressa da un numero detto eccentricità dell'ellisse, convenzionalmente denotata da e (da non confondere con la costante matematica e). L'eccentricità è legata ad a e b dall'espressione

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

L'eccentricità è un numero positivo compreso tra 1 e 0, (se è pari a 0, l'ellisse è degenerato in una circonferenza). Maggiore è l'eccentricità, maggiore è il rapporto tra a e b , quindi l'ellisse è più allungata. La distanza tra i due fuochi è $2ae$.

Il **semilato retto** di un'ellisse, solitamente denotata dalla lettera l , è la distanza tra il fuoco dell'ellisse e l'ellisse stessa misurata lungo una linea perpendicolare all'asse maggiore. È legata ad a e b dalla formula $al = b^2$.

In coordinate polari, un'ellisse con un fuoco nell'origine e l'altro lungo la parte negativa dell'asse delle ascisse è data dall'equazione:

$$r(1 + e\cos\theta) = l$$

Un'ellisse può essere pensata anche come la proiezione di una circonferenza: una circonferenza su un piano con angolo φ rispetto al piano orizzontale proiettata verticalmente su un piano orizzontale da un'ellisse di eccentricità $\sin \varphi$, supponendo che φ sia diverso da 90° .

L'area racchiusa da un'ellisse è πab . La circonferenza di un'ellisse è $4aE(e)$, dove la funzione E è l'integrale ellittico del secondo tipo.

Indice

- 1 Equazione generale di un ellisse
- 2 Lunghezza
- 3 Proprietà tangenziale
- 4 Voci correlate

Equazione generale di un ellisse

Per trovare l'equazione di un ellisse avente i fuochi $F_1(x_{F1}; y_{F1})$ e $F_2(x_{F2}; y_{F2})$ con il semiasse maggiore a l'equazione è:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

I parametri A, B, C, D, E e F sono:

$$A = 16a^2 - 4(x_{F1} - x_{F2})^2$$

$$B = -8(y_{F1} - y_{F2})$$

$$C = 16a^2 - 4(y_{F1} - y_{F2})^2$$

$$D = 4(x_{F1} - x_{F2})^3 - 16 * a^2 * (x_{F1} - x_{F2})$$

$$E = 4(y_{F1} - y_{F2})(4a^2 - (y_{F1})^2 + (y_{F2})^2 - (x_{F1})^2 + (x_{F2})^2)$$

$$F = -16a^4 + 8a^2((y_{F1})^2 + (y_{F2})^2 + (x_{F1})^2 + (x_{F2})^2) - (y_{F1})^2 + (y_{F2})^2 - (x_{F1})^2 + (x_{F2})^2$$

Lunghezza

La lunghezza dell'ellisse è $4aE(e)$, dove la funzione E è un integrale ellittico completo di seconda specie.

L'espansione in serie è:

$$c = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots \right]$$

Una buona approssimazione è quella di Ramanujan:

$$c \approx \pi \left[3(a + b) - \sqrt{(3a + b)(a + 3b)} \right]$$

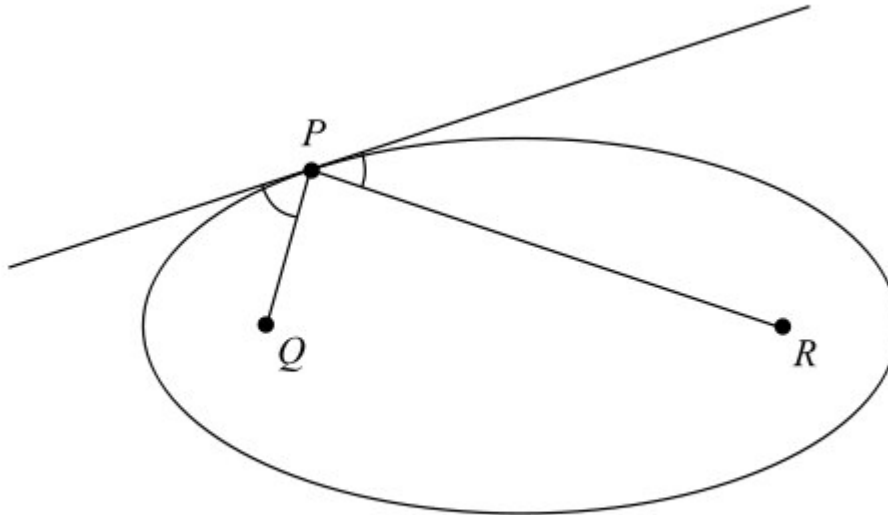
che può anche essere scritta come:

$$c \approx \pi a \left[3(1 + \sqrt{1 - e^2}) - \sqrt{(3 + \sqrt{1 - e^2})(1 + 3\sqrt{1 - e^2})} \right]$$

Più in generale, la lunghezza dell'arco di una porzione di circonferenza, come funzione dell'angolo sotteso, è data da un integrale ellittico incompleto. La funzione inversa, l'angolo sotteso come funzione della lunghezza dell'arco, è data da una funzione ellittica.

Proprietà tangenziale

Una tangente all'ellisse in un punto P forma angoli uguali con le rette che congiungono P con i due fuochi.



Per dimostrare questa proprietà si può usare il teorema di Erone che stabilisce che

Data una retta r e due punti esterni Q ed R , il punto P della retta r che minimizza la somma $PQ+PR$ è quel punto tale che i segmenti PQ e PR formano angoli uguali con la retta r .

Consideriamo quindi un'ellisse di fuochi Q ed R . Questa sarà il luogo dei punti P tale che la somma delle distanze $PQ+PR$ sarà uguale ad un valore prefissato d . Consideriamo una retta passante per un punto P dell'ellisse tale che forma angoli uguali con i segmenti PQ e PR . Per il *teorema di Erone* il punto P è il punto della retta che rende minima la somma $PQ+PR$, questo implica che la retta deve essere tangente all'ellisse, infatti se non fosse tangente la retta entrerebbe nell'interno dell'ellisse, quindi ci sarebbe un punto P' della retta per cui $P'Q+P'R < d$ e non sarebbe più vero che il minimo è realizzato in P .

Come conseguenza di questa proprietà si ha che in un biliardo a forma di ellisse una palla lanciata da uno dei due fuochi verrà riflessa sul bordo in modo tale da passare necessariamente per il secondo e in uno specchio concavo a forma di ellisse tutti i raggi luminosi che partono da uno dei due fuochi arrivano necessariamente all'altro in tutte le direzioni e dopo alcuni rimbalzi sulle pareti la palla tenderà a portarsi sull'asse maggiore rimbalzando tra i punti A e B. Questo spiega perché i fuochi dell'ellisse si chiamano appunto "fuochi". Analogamente in una camera a forma di ellisse le onde sonore che partono da uno dei due fuochi arrivano all'altro lungo tutte le direzioni e poiché la distanza percorsa nel tragitto da un fuoco all'altro è sempre la stessa le onde arriveranno tutte sincronizzate, in questo modo due persone poste nei due fuochi potrebbero comunicare facilmente anche da lunghe distanze, mentre altre persone, anche notevolmente più vicine a chi parla non sentirebbero niente. Questo è il principio sul quale sono state costruite alcune sale.

Voci correlate

- Ellissoide, un'ellisse in tre o più dimensioni.
- Sferoide, l'ellissoide ottenuto ruotando un'ellisse attorno al suo asse maggiore o minore.
- Superellisse, una generalizzazione dell'ellisse, è più squadrata.
- Ellisse del giardiniere
- Orbita ellittica

- Iperbole
- Parabola
- Sezione conica

Categorie: Sezioni coniche | Curve piane

-
- Ultima modifica per la pagina: 20:10, 20 set 2007.
 - Tutti i testi sono disponibili nel rispetto dei termini della GNU Free Documentation License.