Equazione di terzo grado

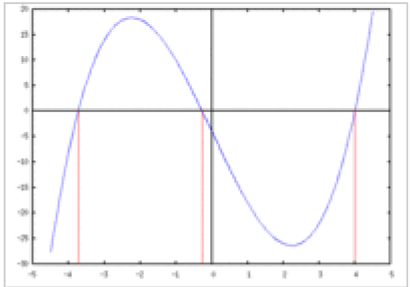
Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.
(Reindirizzamento da Equazione cubica)

Si definisce **equazione di terzo grado** o **cubica** quell'equazione polinomiale in cui il grado massimo dell'incognita è il terzo. Nella forma canonica, si presenta come

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

La prima soluzione generale dell'equazione di terzo grado si deve al matematico italiano Scipione del Ferro, (circa 1465 - 1526).

Indice



La cubica di equazione x^3-15x-4=0

Cenni storici

Sin dai tempi della matematica babilonese erano noti i metodi risolutivi delle particolari equazioni di terzo grado che possono essere ricondotte ad un'equazione di secondo grado. I greci riuscivano a risolvere geometricamente alcune equazioni di terzo grado tramite l'uso delle coniche, metodo reso famoso dall'aneddoto della duplicazione dell'altare di Apollo. Durante l'età della matematica araba, Omar Khayyam credeva che, a parte i casi riducibili, non esistesse un metodo risolutivo generale per le equazioni di terzo grado, opinione che ancora Luca Pacioli riportava nella sua opera del 1494 "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* ".

Un primo procedimento risolutivo di buona generalità venne scoperto da Scipione del Ferro; la data esatta di questa scoperta resta ignota, ma egli la comunicò in fin di vita (ca. 1526) ad un suo allievo, Antonio Maria Flor, detto *Floridus* in latino.

Niccolò Fontana detto Tartaglia già nel 1541 sapeva risolvere problemi implicanti equazioni di terzo grado: quando si diffuse la voce, Floridus e Tartaglia si sfidarono a vicenda, ognuno sottoponendo all'altro trenta "questioni" da risolvere entro una certa data. Quando arrivò il giorno stabilito, Tartaglia aveva risolto tutti problemi di Floridus, ma questi nemmeno uno. All'epoca infatti i numeri negativi non venivano usati, ricorrendo a diversi metodi risolutivi con soli numeri positivi: Floridus conosceva solamente un metodo per coefficienti positivi, ossia per equazioni della forma

$$x^3 + px = q$$

mentre Tartaglia gli aveva sottoposto tutti problemi con coefficienti negativi, e nella forma

$$x^3 + px^2 = q$$

probabilmente riconducendo questo caso al precedente. Era infatti noto che, se il coefficiente di terzo grado è l'unità, allora quello di secondo grado cambiato di segno è la somma delle radici.

Sorse poi nel 1545 un'aspra polemica tra Tartaglia, Gerolamo Cardano e Ludovico Ferrari, cui si deve la soluzione generale dell'equazione di quarto grado, circa la paternità della soluzione. Venuto a sapere della vittoria su Floridus, Cardano aveva invitato Tartaglia a recarsi da lui, con la vaga promessa di trovargli un mecenate. Tartaglia non aveva fonti di reddito stabili forse a causa della balbuzie, causatagli da una sciabolata ricevuta da ragazzo durante l'assalto di Brescia da parte di truppe francesi nel 1512. Il difetto, a cui si deve anche il soprannome autoimpostosi di Tartaglia, lo rendeva inadatto all'insegnamento, per cui l'offerta venne accettata. Cardano era un medico di fama europea, tanto che venne chiamato in Scozia per diagnosticare il malanno dell'Arcivescovo di St. Andrews. Tartaglia dunque rivelò a Cardano il procedimento che conosceva sotto vincolo di segretezza: Tartaglia infatti intendeva pubblicare la sua scoperta a coronamento del suo trattato sull'algebra.

Pur se figlio illegittimo, astrologo, eretico e giocatore incallito, non di meno Cardano era un rispettabile professore a Bologna e Milano, tanto che ebbe una pensione dal Papa. Non era certamente uno stinco di santo, dato che uno dei figli gli avvelenò la moglie, l'altro divenne criminale e lo stesso Ferrari, suo segretario, morì forse avvelenato dalla propria sorella. Tuttavia fu uno scrittore prolifico nel campo della medicina, delle scienze naturali e della matematica. Con l'uscita dell'*Artis Magnae sive de regulis algebraicis* nel 1545, in cui vennero pubblicate le soluzioni per le equzioni di terzo e quarto grado, divampò la polemica con Tartaglia. Pur riconoscendo la paternità delle prime a Tartaglia e delle seconde a Ferrari, Cardano era certamente venuto meno alla promessa fatta a Tartaglia stesso.

Metodo risolutivo

Sia Cardano, che Tartaglia, che altri algebristi italiani rinascimentali pubblicarono loro metodi per la risoluzione delle equazioni di 3° grado. Tempo dopo, Vieta, dopo l'introduzione dei coefficienti letterali, pubblicò nell'Isagoge un metodo molto lineare, che prevede la risoluzione di un'equazione di terzo grado completa riducendola, tramite una multipla sostituzione delle variabili, ad una particolare equazione quadratica. Un'equazione nella forma

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

si riconduce alla forma

1) $y^3 + py + q = 0$,

che era la forma delle prime equazioni risolte da Dal Ferro, ponendo

$$z = y - \frac{a}{3}$$

Infatti, svolgendo poi i semplici calcoli si ottiene un'equazione in x ridotta in cui manca il termine di grado 2. Si effettua poi un'ulteriore sostituzione: si ponga

$$y = x - \frac{p}{x} \times \frac{1}{3}.$$

Dopo alcuni calcoli, e dopo aver moltiplicato per $27x^3$, si ottiene l'equazione in questa forma:

$$27x^6 + 27px^3 + q = 0$$

Che è un'equazione trinomia in x^3, che si riconduce facilmente a un'equazione quadratica effettuando la sostituzione

$$z^3 = t.$$

Risolvendola, e quindi ricordando che $t = z^3$ e quindi per ottenere x bisognerà estrarre le radici cubiche, si ottiene

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Problemi relativi alle soluzioni

Cardano incontrò però alcune difficoltà, dati i metodi dell'epoca, a trattare casi come

$$x^3 = 15x + 4$$

Infatti applicando la formula risolutiva si trova

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

e la radice di un numero negativo non si sapeva trattare. Però, cercando una soluzione con i metodi geometrici di Omar Khayyam, si trova che una soluzione è $x = 4$ e di conseguenza altre due soluzioni sono ottenibili risolvendo la $x^2 + 4x + 1 = 0$. Quindi l'equazione ha tre radici reali, ovvero si ha la fattorizzazione

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4) \cdot (x + 2 - \sqrt{3}) \cdot (x + 2 + \sqrt{3})$$

mentre la formula risolutiva porta a numeri non reali.

In generale si incorre in numeri non reali con equazioni della forma (1) per le quali

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 < -\left(\frac{q}{2}\right)^2$$

Questa disuguaglianza caratterizza quello che veniva chiamato **caso irriducibile**, caso ritenuto intrattabile. Gli autori posteriori (primo fra tutti Rafael Bombelli, ma purtroppo riconosciuto solo da pochi, tra questi però Leibniz) riprenderanno questi risultati giungendo alla introduzione dei numeri complessi, entità indispensabili per disporre di un procedimento generale per la risoluzione delle equazioni di terzo grado a coefficienti reali. I numeri complessi si sono poi rivelati fondamentali per moltissimi altri sviluppi matematici, in particolare per il teorema fondamentale dell'algebra.

Un caso particolare

Se è vera l'equazione

$(ad - bc) / a^2 = A = 0,$

allora abbiamo ovviamente almeno una soluzione perché l'equazione della cubica sarà così rappresentabile:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x + b/a) \cdot (x^2 + c/a),$$

É quindi supponibile che una eventuale equazione universale per la risoluzione delle cubiche si possa presentare nella forma

$$(x + b/a + BA^n) \cdot (x^2 - CxA^m + c/a + DA^l)$$

Voci correlate

- Funzione cubica
- Equazione di primo grado
- Equazione di secondo grado
- Equazione di quarto grado

Bibliografia e riferimenti

- Boyer, C., "Storia della matematica", 1976, Mondadori, ISBN 8804334312

Categorie: Equazioni | Polinomi