Equazione quadratica

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Si definiscono **equazioni di secondo grado** o **quadratiche** le equazioni polinomiali di secondo grado in una incognita, cioè quelle riconducibili alla forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con $a \neq 0$.

Le equazioni di secondo grado possono ammettere due, una o nessuna soluzione reale, mentre le soluzioni complesse sono in ogni caso 2 (eventualmente coincidenti). Sono particolarmente semplici nella risoluzione le equazioni *incomplete*, ossia quelle in cui il secondo e/o il terzo coefficiente sono nulli.

Il grafico della funzione

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

nel piano cartesiano è una parabola.

Indice

Equazioni quadratiche incomplete

Equazione spuria

Si dice **equazione quadratica spuria** un'equazione quadratica che manca del termine noto, ossia avente la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

Un'equazione di questo tipo si risolve facilmente tramite scomposizione:

$$x(ax+b)=0$$

Per la legge di annullamento del prodotto quest'equazione è equivalente alle due:

$$x=0 \quad \text{e} \quad ax+b=0$$

E in definitiva le sue soluzioni sono $x=0$ e $x=-\frac{b}{a}$

Equazione pura

Si dice **equazione quadratica pura** un'equazione polinomiale di secondo grado che manca del termine di primo grado, cioè che è della forma:

$$ax^2+c=0$$

Portando *c* al secondo membro e dividendo per *a* si ottiene:

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

Se $-\frac{c}{a}<0$, l'equazione non ammette soluzioni reali (ma due soluzioni immaginarie); viceversa, se $-\frac{c}{a}>0$, l'equazione è risolta da:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Equazione monomia

Si dice **equazione monomia** un'equazione quadratica nella quale $b = 0$ e $c = 0$. In questo caso l'equazione ammette come soluzione doppia $x = 0$.

Equazioni complete

Un'equazione polinomiale di secondo grado viene detta **equazione quadratica completa** quando tutti i suoi coefficienti sono diversi da 0. Essa viene risolta con il cosiddetto metodo del completamento del quadrato, così chiamato perché si modifica l'equazione fino ad ottenere al suo primo membro il quadrato di un binomio nella forma $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Anzitutto portiamo *c* al secondo membro:

$$ax^2+bx=-c$$

Moltiplichiamo per 4*a* entrambi i membri, ottenendo:

$$4a^2x^2+4abx=-4ac$$

Notiamo che $4a^2x^2=(2ax)^2$ e $4abx=2\cdot(2ax)\cdot b$: dunque per fare in modo che al primo membro si abbia un quadrato di binomio, aggiungiamo b^2 ad ambo i membri:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

ovvero:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Il secondo membro di quest'equazione è detto **discriminante** e in genere viene indicato con la lettera greca Δ (Delta). Se $b^2 - 4ac < 0$ evidentemente non ci sono soluzioni reali, dal momento che il primo membro è sempre maggiore o uguale a 0. In caso contrario, possiamo scrivere:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

che con semplici passaggi possiamo riscrivere come:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Quest'ultima è nota come **formula risolutiva delle equazioni quadratiche**.

Calcolo delle soluzioni

Alla luce della dimostrazione precedente, è chiaro che, nella risoluzione di un'equazione quadratica, è anzitutto necessario calcolare il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Si distinguono tre casi:

- Se $\Delta > 0$, vi sono due soluzioni distinte:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Se $\Delta = 0$, la formula risolutiva diventa:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm 0}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

  Pertanto la soluzione è unica o, come spesso si dice, le due radici sono coincidenti (o ancora vi è una radice doppia); $x_1 = x_2$.

- Se $\Delta < 0$, infine, l'equazione non ha soluzioni reali.

  In particolare le soluzioni sono sempre due, ma appartengono ai numeri complessi: sono due numeri complessi coniugati e si calcolano tramite le formule:

$$x_+ = \frac{-b}{2a} + i\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right) \qquad \text{e} \qquad x_- = \frac{-b}{2a} - i\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right),$$

dove *i* è parte immaginaria.

Interpretazione geometrica

Le radici dell'equazione quadratica

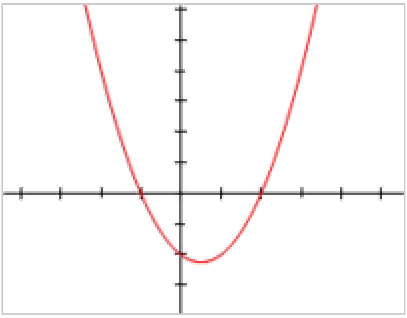
$$ax^2 + bx + c = 0,$$

sono anche gli zeri della funzione quadratica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

dal momento che essi sono i valori di x per cui

$$f(x) = 0.$$



Per la funzione quadratica: $f(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, di una variabile reale x, le ascisse dei punti dove il grafico tocca l'asse x, $x = -1$ e $x = 2$, sono le radici dell'equazione quadratica: $x^2 - x - 2 = 0$.

Se a, b, c sono numeri reali ed il dominio di f è l'insieme dei numeri reali, allora gli zeri di f sono esattamente le ascisse dei punti dove il grafico di f tocca l'asse x.

Dalle considerazioni precedenti, si deduce che se il discriminante è positivo, il grafico tocca l'asse delle ascisse in due punti; se è nullo, il grafico è tangente all'asse x in un punto; se è negativo, il grafico non tocca mai l'asse x.

Forma ridotta della formula risolutiva

Nel caso in cui il coefficiente del termine di primo grado sia un numero pari oppure un'espressione algebrica in cui si possa mettere in evidenza il fattore 2, è possibile semplificare la formula risolutiva con la posizione $t = b/2$. In questo caso, infatti:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - ac}}{a}.$$

Dimostriamo che si tratta di una soluzione all'equazione di secondo grado sostituendo la soluzione nell'equazione iniziale e ottenendo un'identità.

$$a \cdot \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 + b \cdot \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + c = 0$$

$$\frac{ab^2 + ab^2 - 4a^2c - 2ab \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a^2} - \frac{b^2 - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + c = 0$$

$$2ab^2 - 4a^2c - 2ab^2 + 4a^2c = 0.$$

L'identità è verificata.

Relazioni tra radici e coefficienti

Poniamo $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1 x_2$. Sommando membro a membro le due soluzioni abbiamo:

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Effettuando invece il prodotto membro a membro abbiamo:

$$\begin{aligned} p &= x_1 x_2 = \frac{(-b-\sqrt{b^2-4ac})(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2} \\ &= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Queste due relazioni ci consentono di determinare somma e prodotto delle radici senza risolvere l'equazione; esse sono un caso particolare delle formule di Viète. Inoltre, se riscriviamo la generica equazione di secondo grado nella cosiddetta *forma normale*:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

con banali sostituzioni si ottiene la forma:

$$x^2 - sx + p = 0$$

Scomposizione in fattori del trinomio

Consideriamo il polinomio completo di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c$$

e supponiamo anche che il discriminante dell'equazione che si ottiene uguagliando a zero il polinomio sia positivo (ipotesi non necessaria nel campo dei numeri complessi). Raccogliendo *a* si ottiene:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Abbiamo già trovato prima che $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Dunque:

$$\begin{aligned} a[x^2 + -(x_1+x_2)x + x_1x_2] &= a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] \\ &= a[x(x-x_1) - x_2(x-x_1)] \\ &= a(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

Regola dei segni

Per approfondire, vedi la voce ***Regola dei segni di Cartesio****.*

La **regola dei segni** o **regola di Cartesio** consente di determinare il segno delle radici di un'equazione completa con discriminante non negativo. Consideriamo, nell'ordine, i segni di *a*, *b*, *c*. Possiamo assumere che sia *a* > 0, a meno di moltiplicare entrambi i termini per -1. Ci sono 4 possibili combinazioni:

a	b	c
+	+	+
+	+	-
+	-	-
+	-	+

1. Primo caso: $a, b, c > 0$. Ricordando che $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, segue che il loro prodotto è positivo e la loro somma negativa, per cui entrambe le soluzioni sono negative.
2. Secondo caso: $a, b > 0$ e $c < 0$. Allora il prodotto delle radici è negativo (che implica che sono discordi) e la somma è negativa (che implica che la soluzione negativa è in valore assoluto maggiore di quella positiva).
3. Terzo caso: $a > 0$ e $b, c < 0$. Allora il prodotto delle radici è negativo (che implica di nuovo che sono discordi) ma la somma è positiva (dunque la soluzione positiva è maggiore in valore assoluto).
4. Quarto caso: $a, c > 0$ e $b < 0$. Allora il prodotto delle radici è positivo come pure la loro somma, implicando che entrambe le radici sono positive.

Chiamando *permanenza* ogni successione di due segni uguali e *variazione* ogni successione di segni contrari, possiamo riassumere i risultati precedenti affermando che ad ogni permanenza corrisponde una soluzione negativa e ad ogni variazione una soluzione positiva; quando le radici sono discordi, in valore assoluto è maggiore quella positiva se la variazione precede la permanenza; quella negativa se la permanenza precede la variazione.

Esempio di risoluzione tramite completamento del quadrato

Sia

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 = 0$$

allora

$$(x^2 + 3x + 9/4) - 9/4 + 2 = 0$$

$$(x + 3/2)^2 - 9/4 + 2 = 0$$

$$(x+3/2)^2 = 1/4$$

da cui

1. $x+3/2 = 1/2 \iff x_1 = -1$
2. $x+3/2 = -1/2 \iff x_2 = -2$

A questo punto è possibile disegnare il grafico di *f(x)*, traslando la parabola associata a $y = x^2$ di -3/2 lungo l'asse *x* e di -1/4 lungo l'asse *y*.

Formula alternativa

In certe situazioni è preferibile esprimere le radici in una forma alternativa.

$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}.$$

Tuttavia, questa formula è corretta solo con la condizione aggiuntiva che *c* non sia nullo. Se *c* = 0, questa formula fornisce correttamente la soluzione *x* = 0, ma non consente di ottenere la radice diversa da zero (dal momento che si otterrebbe la divisione 0/0, che non è definita).

Naturalmente, i valori delle due radici risultano uguali indipendentemente che si usi la formula "classica" o quella alternativa, che è in effetti una semplice variante algebrica della prima:

$$\begin{aligned}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)} \\ &= \frac{4ac}{2a\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)} \\ &= \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}.\end{aligned}$$

Un'attenta implementazione su un calcolatore dotato di operazioni in virgola mobile differisce da entrambe le formule per garantire la robustezza del risultato. Assumendo che il discriminante sia positivo e *b* diverso da 0, si può usare codice come il seguente:

$$\begin{aligned}&t := -(b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2-4ac})/2 \\ &r_1 := t/a \\ &r_2 := c/t\end{aligned}$$

dove sgn(*b*) denota la funzione segno, che vale +1 se *b* è positivo e −1 se *b* è negativo; questo accorgimento assicura di sommare due quantità dello stesso segno, evitando l'eventuale perdita di precisione. Il calcolo della seconda radice r_2 sfrutta il fatto che il prodotto delle radici è uguale a *c*/*a*.

Cenni storici

Gli antichi babilonesi lasciarono nelle tavolette di argilla le prime testimonianze della scoperta delle equazioni quadratiche e trovarono le prime tecniche per risolverle. Il matematico indiano Baudhayana, che scrisse un Sulba Sutra nell'antica India all'incirca nell'VIII secolo a.C. usò per primo equazioni quadratiche della forma $ax^2 = c$ e $ax^2 + bx = c$, indicando i metodi per risolverle.

I matematici babilonesi (intorno al 400 a.C.) e cinesi utilizzarono il metodo del completamento del quadrato per risolvere varie equazioni quadratiche con radici positive, ma non ottennero una formula generale. Euclide descrisse un metodo geometrico più astratto intorno al 300 a.C. Il *manoscritto di Bakshali*, scritto in India fra il 200 a.C. ed il 400 d.C., introdusse la formula risolutiva delle equazioni quadratiche.

Il primo matematico noto ad aver usato la formula algebrica generale, consentendo sia le soluzioni positive che quelle negative, fu Brahmagupta (India, VII secolo). Al-Khwarizmi (Arabia, XI secolo) sviluppò indipendentemente un insieme di formule che funzionava per le soluzioni positive. Abraham bar Hiyya Ha-Nasi (conosciuto anche con il nome latino Savasorda) fu il primo ad introdurre in Europa la soluzione completa con il suo *Liber embadorum*.

La priorità della scoperta della formula generale per risolvere un'equazione quadratica è stata attribuita a Sridhara, sebbene ai suoi tempi vi fu una disputa. La regola (come riportata da Bhaskara II) è:

> *Moltiplica entrambi i membri dell'equazione per una quantità nota uguale a quattro volte il coefficiente del quadrato dell'incognita; aggiungi ad entrambi i membri una quantità nota uguale al quadrato del coefficiente dell'incognita; quindi determina la radice quadrata.* [1] (http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Sridhara.html)

Voci correlate

- Equazione
- Equazione lineare
- Equazione cubica
- Equazione quartica
- Radicale
- Parabola
- Funzione quadratica

Categorie: Equazioni | Polinomi | Matematica di base

- Ultima modifica per la pagina: 09:22, 17 set 2007.