Regola di Ruffini

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Calcolo letterale
Monomio
Binomio
Trinomio
Polinomio
Prodotti notevoli
Divisione dei polinomi
Divisibilità dei polinomi
Teorema di Ruffini
Regola di Ruffini
Divisibilità di binomi notevoli

In matematica, la **regola di Ruffini** permette la divisione veloce di un qualunque polinomio per un binomio della forma $x - a$. È stata descritta da Paolo Ruffini nel 1809. La regola di Ruffini è un caso speciale della divisione polinomiale quando il divisore è un fattore lineare. La regola di Ruffini è anche nota come **divisione sintetica**.

Indice

L'algoritmo

La regola di Ruffini stabilisce un metodo per dividere il polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

per il binomio

$$A(x) = x - r$$

per ottenere il polinomio quoziente

$$Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

e un resto *R* che è zero o un termine costante, visto che deve essere di grado minore rispetto al polinomio divisore.

L'algoritmo non è altro che la divisione polinomiale di *P*(*x*) per *A*(*x*) scritto in un'altra forma più economica.

Per dividere *P*(*x*) per *A*(*x*), infatti:

1. Si prendano i coefficienti di *P*(*x*) e li si scrivano in ordine. Si scriva quindi *r* in basso a sinistra, proprio sopra la riga:

```
  |     a_n     a_n-1     ...     a_1     a_0
```

```
    |
  r |
----|-------------------------------------------------------
    |
    |
```

2. Si copi il coefficiente di sinistra (a_n) in basso, subito sotto la riga:

```
    |        a_n        a_{n-1}        ...        a_1        a_0
    |
  r |
----|-------------------------------------------------------
    |        a_n
    |
    |      = b_{n-1}
    |
```

3. Si moltiplichi il numero più a destra di quelli sotto la riga per *r*, e lo si scriva sopra la riga, spostato di un posto a destra:

```
    |        a_n        a_{n-1}        ...        a_1        a_0
    |
  r |                   b_{n-1}r
----|-------------------------------------------------------
    |        a_n
    |
    |      = b_{n-1}
    |
```

4. Si sommi questo valore con quello sopra di lui nella stessa colonna:

```
    |        a_n        a_{n-1}        ...        a_1        a_0
    |
  r |                   b_{n-1}r
----|-------------------------------------------------------
    |        a_n     a_{n-1}+(b_{n-1}r)
    |
    |      = b_{n-1}    = b_{n-2}
    |
```

5. Si ripetano i passi 3 e 4 fino al termine dei coefficienti

```
    |        a_n        a_{n-1}        ...        a_1        a_0
    |
  r |                   b_{n-1}r       ...        b_1r       b_0r
----|-------------------------------------------------------
    |        a_n     a_{n-1}+(b_{n-1}r)    ...     a_1+b_1r     a_0+b_0r
    |
    |      = b_{n-1}    = b_{n-2}      ...     = b_0        = R
    |
```

I valori *b* sono i coefficienti del polinomio risultante ($Q(x)$), il cui grado sarà inferiore di uno a quello di $P(x)$. *R* è il resto.

Un esempio numerico viene fornito più sotto.

Usi della regola

La regola di Ruffini ha molte applicazioni pratiche; molte di esse si basano sulla divisione semplice (come mostrato sotto) o sulle estensioni usuali che seguono.

Divisione polinomiale per $x - r$

Ecco un esempio di divisione polinomiale, con tutti i passaggi evidenziati.

Siano

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$$
$$A(x) = x + 1$$

Vogliamo dividere $P(x)$ per $A(x)$ usando la regola di Ruffini. Il primo problema è che $A(x)$ non è della forma $x - r$, ma piuttosto $x + r$. Questo è facile da risolvere: basta riscrivere $A(x)$ come

$$A(x) = x + 1 = x - (-1)$$

Applichiamo ora l'algoritmo.

1. Scriviamo i coefficienti di $P(x)$ e r. Notiamo che dobbiamo usare uno zero per il coefficiente di x in $P(x)$:

```
    |     2     3     0     -4
    |
 -1 |
----|----------------------------
    |
    |
```

2. Copiamo il primo coefficiente sotto:

```
    |     2     3     0     -4
    |
 -1 |
----|----------------------------
    |     2
    |
```

3. Moltiplichiamo il numero più a destra sotto la riga per r:

```
    |     2     3     0     -4
    |
 -1 |          -2
----|----------------------------
    |     2
    |
```

4. Sommiamo i valori della seconda colonna dopo la riga verticale:

```
    |     2     3     0     -4
    |
```

```
 -1 |         -2
----|---------------------------
    |     2     1
    |
```

5. Ripetiamo i passi 3 e 4 fino alla fine:

```
    |     2     3     0      -4
    |
 -1 |         -2     -1       1
----|---------------------------
    |     2     1    -1 |    -3
    |    {coefficienti} | {resto}
```

Insomma, abbiamo che

$P(x) = A(x) * Q(x) + R$, dove

$Q(x) = 2x^2 + x - 1$ e $R = -3$.

Divisione polinomiale per $ax - k$

Applicando una facile trasformazione, la regola di Ruffini si può generalizzare anche per le divisioni di un polinomio per un binomio qualsiasi di primo grado $A(x) = ax - k$. Infatti, considerando la relazione fondamentale

$$P(x) = (ax - k) \cdot Q(x) + R(x)$$

dividendo tutto per a (sicuramente diverso da 0) otteniamo

$$\frac{P(x)}{a} = \frac{(ax - k) \cdot Q(x)}{a} + \frac{R(x)}{a}$$

Detti $P(x) / a = P'(x)$ e $R(x) / a = R'(x)$ otteniamo

$$P'(x) = (x - \frac{k}{a}) \cdot Q(x) + R'(x)$$

Dunque il quoziente richiesto $Q(x)$ è anche il quoziente della divisione di $P'(x)$ per $(x - k / a)$, che si può fare con la regola appena esposta. Per trovare il resto richiesto $R(x)$ basterà moltiplicare il resto ottenuto $R'(x)$ per a.

Trovare le radici di un polinomio

Il Teorema delle radici razionali afferma che se un polinomio $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$ ha coefficienti (da a_n sino ad a_0) interi, le sue radici razionali reali sono sempre della forma p/q, dove p è un divisore intero (non necessariamente positivo, quindi) di a_0 e q un divisore intero di a_n. Se il nostro polinomio è quindi

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0,$$

le radici razionali possibili appartengono all'insieme dei divisori interi di a_0 (−2):

$$\text{radici possibili: } \{+1, -1, +2, -2\}$$

Questo è un esempio semplice, perché il polinomio è **monico** (cioè, a_n=1); per i polinomi non monici, l'insieme delle possibili radici comprenderà alcune frazioni, ma solo in numero finito, dato che a_n e a_0 hanno ciascuno un numero finito di divisori interi. In ogni caso per i polinomi monici ogni radice razionale è un intero, e quindi ogni radice intera dev'essere un divisore del termine costante. Si può dimostrare che questo resta vero anche per i polinomi non monici: insomma, *per trovare le radici intere di un polinomio a coefficienti interi, basta verificare i divisori del termine costante*. Infatti, ogni polinomio non monico può essere ricondotto al caso monico, semplicemente dividendo i coefficienti per a_n.

Provando pertanto a porre *r* pari a ciascuna delle radici possibili, si può provare a dividere il polinomio per *(x-r)*. Se il polinomio quoziente risultante non ha resto, abbiamo trovato una radice.

Si può scegliere uno dei due metodi seguenti: essi danno gli stessi risultati, con l'eccezione che solo il secondo permette di trovare se una radice è ripetuta. (Ricordate che nessuno dei due metodi permette di scoprire radici irrazionali o complesse).

Primo metodo

Cerchiamo di dividere $P(x)$ per il binomio (x − ciascuna possibile radice). Se il resto è 0, il numero utilizzato è una radice (e viceversa):

```
    |    +1     -4     +5      -2                       |    +1     -4     +5     -2
    |                                                   |
 +1 |           +1     -3      +2                    -1 |           -1     +5     -10
----|----------------------------                   ----|---------------------------
    |    +1     -3     +2       0                       |    +1     -5     +10     -12
```

```
    |    +1     -4     +5      -2                       |    +1     -4     +5     -2
    |                                                   |
 +2 |           +2     -4      +2                    -2 |           -2     +12    -34
----|----------------------------                   ----|---------------------------
    |    +1     -2     +1       0                       |    +1      -6     +17    -36
```

$x_1 = +1$, $x_3 = +2$ sono radici, mentre $x_2 = -1$ e $x_4 = -2$ non lo sono.

Secondo metodo

Iniziamo come nel primo metodo fino a che troviamo una radice. A questo punto, invece che ripartire con le altre radici possibili, si continua a fare il test a partire dal polinomio quoziente ottenuto ripartendo dalla radice appena trovata, per vedere se ci sono radici multiple:

```
    |    +1     -4     +5     -2                      |    +1     -4     +5     -2
    |                                                 |
 +1 |           +1     -3     +2                   +2 |           +2     -4     +2
----|---------------------------                  ----|---------------------------
    |    +1     -3     +2    | 0                      |    +1     -2     +1    | 0
    |                        |                        |                        |
 +1 |           +1     -2    |                     +2 |           +2     +2    |
----|--------------------|                        -------------------------|
    |    +1     -2      0                             |    +1      0     +3
```

$x_1 = +1$ è una radice multipla, mentre $x_3 = +2$ è una radice semplice.

Fattorizzazione polinomiale

Dopo avere usato il metodo "p/q" mostrato sopra (o un qualunque altro modo) per trovare tutte le radici razionali reali di un certo polinomio, è semplice sfruttarle per fattorizzare parzialmente il polinomio stesso: a ogni fattore lineare (x - r) che divide un polinomio dato corrisponde una radice r, e viceversa.

Quindi, se abbiamo il polinomio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,;$$

e abbiamo trovato come sue radici:

$$R = \{\text{radici di } P(x) \in \mathbb{Q}\}\ \ ;$$

consideriamo il prodotto:

$$Q(x) = a_n \prod_{r \in R} (x - r).$$

Per il Teorema fondamentale dell'algebra, Q(x) sarebbe uguale a P(x) se tutte le radici di P(x) fossero razionali. Ma è assai probabile che Q(x) non sia uguale a P(x), dato che P(x) potrebbe avere anche radici irrazionali o complesse. Consideriamo allora il polinomio quoziente

$$S(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Se S(x) = 1, allora Q(x) = P(x). Altrimenti, S(x) sarà un polinomio, per la precisione un altro fattore di P(x) che non ha radici razionali in $\mathbb{R}$. Dunque

$$P(x) = Q(x) * S(x)$$

è una fattorizzazione completa di P(x) su $\mathbb{Q}$ se S(x) = 1, altrimenti sarà una fattorizzazione completa su $\mathbb{Q}$, ma ci saranno altri fattori su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$.

Primo esempio: nessun resto

Sia

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

Con i metodi descritti sopra, troviamo che le radici razionali di $P(x)$ sono:

$$R = \{+1, -1, -2\}$$

Pertanto, il prodotto di (x – ciascuna radice) è

$$Q(x) = 1(x-1)(x+1)(x+2)$$

P(*x*)/*Q*(*x*) dà

$$S(x) = 1$$

E così il polinomio fattorizzato è *P*(*x*) = *Q*(*x*) * 1 = *Q*(*x*):

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$$

Secondo esempio: con resto

Sia

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 8$$

Con i metodi descritti sopra, troviamo che le radici razionali di *P*(*x*) sono:

$$R = \{-1, +2\}$$

Pertanto, il prodotto di (*x* – ciascuna radice) è

$$Q(x) = 2(x+1)(x-2)$$

P(*x*)/*Q*(*x*) dà

$$S(x) = x^2 - x + 4$$

Dato che $S(x) \neq 1$, il polinomio fattorizzato sui razionali è *P*(*x*) = *Q*(*x*) * *S*(*x*):

$$P(x) = 2(x+1)(x-2)(2x^2 - x + 4)$$

Voci correlate

- Algebra elementare
- Polinomio
- Divisione dei polinomi

Categorie: Polinomi | Algebra elementare | Algoritmi numerici